Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

19.03.2016 – VII разред

1. Докажи да је $\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}}$ рационалан број.

2. Дужина странице правилног шестоугла *ABCDEF* је 2cm. Праве одређене страницама *AB* и *CD* секу се у тачки *G*. Одреди обим и површину троугла *DFG*.

3. Дат је правилан шеснаестоугао. Одреди број правоуглих троуглова чија су темена уједно и темена датог шеснаестоугла.

4. Пера и Јоца су ушли у продавницу у којој се све цене изражавају целим бројем динара. Пера је купио 3 свеске и 4 оловке и платио новчаницама од 10 динара без кусура. Јоца је купио 9 свезака и 2 оловке. Докажи да и он може платити купљену робу новчаницама од 10 динара без кусура.

5. Нека је *E* средиште странице *CD* квадрата *ABCD* и нека је *F* подножје нормале из *B* на праву *AE*. Докажи да је $CF = CD$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1.

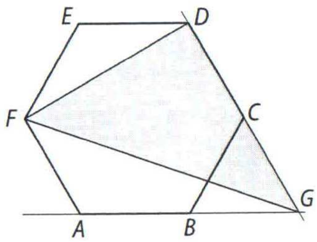
$$\sqrt{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}-4}} \qquad \text{[7 \textbf{поена}]}$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{18-16}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}} \qquad \text{[7 \textbf{поена}]}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=1. \qquad \text{[6 \textbf{поена}]}$$

2. Дуж DF је краћа дијагонала шестоугла, па је $DF=2\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 поена**]. Троугао BGC је једнакостраничан па је DG = 4cm [**5 поена**]. Троугао DFG је правоугли, па је $FG^2 = DF^2 + DG^2 = ((2\sqrt{3})^2 + 4^2)\text{cm}^2 = 28\text{cm}^2$, тј. $FG=2\sqrt{7}\text{cm}$ [**5 поена**]. Зато је његова површина $P=4\sqrt{3}\text{cm}^2$, а обим

$O=(2\sqrt{3}+4+2\sqrt{7})\text{cm}$ [**5 поена**].



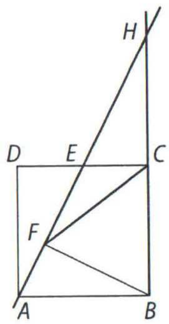
3. Хипотенуза траженог троугла је уједно и пречник описаног круга шеснаестоугла [**5 поена**]. У правилном шеснаестоуглу постоји 8 пречника, који су заправо његове највеће дијагонале [**5 поена**]. Треће теме правоуглог троугла може бити било које друго од 14 преосталих темена па је укупан број правоуглих троуглова $8 \cdot 14 = 112$ [**10 поена**].

4. Нека су x и y, редом, цене свеске и оловке у динарима. Треба показати да је $9x + 2y$ дељиво са 10. Како је број $3x + 4y$ дељив са 10 (по услову задатка), то је и $3(3x + 4y)$ дељиво са 10. Сада имамо:

$$3(3x + 4y) - (9x + 2y) = 10y.$$

Како $10 \mid 3(3x + 4y)$ и $10 \mid 10y$, то број 10 мора да дели и $9x + 2y$, што је и требало доказати [**20 поена**].

5. (**МЛ 49/3**) *Решење 1.* Нека је H тачка пресека правих AE и BC (слика). Правоугли троуглови ADE и HCE су подударни (катета и оштар угао), па је $CH = AD = a$, где је a дужина странице квадрата [**10 поена**]. Дужина хипотенузе правоуглог троугла BFH је $2a$, а CF је тежишна линија одговарајућа тој хипотенузи, одакле је $FC = BC = a$ [**10 поена**].



Решење 2. Нека је G средиште странице AB. Тада је $AGCE$ паралелограм па је $GC \parallel AE$, одакле следи да је $BF \perp CG$ [**8 поена**]. С друге стране, права GC садржи средњу линију троугла ABF, па полови дуж BF, тј. она је њена симетрала [**8 поена**]. Одатле следи да је $CF = CB = CD$ [**4 поена**].